

3. TOEPASSING VAN DE EINDIGE ELEMENTENMETHODE OP ÉÉN- en TWEEDIMENSIONALE RANDWAARDEPROBLEMEN

3.1. Inleiding

In dit hoofdstuk zullen de eenvoudigste eindige elementenruimtes worden behandeld, alsmede toepassingen op randwaardeproblemen. In de §§2-5 behandelen we de stuksgewijze Lagrange-interpolatie met toepassingen op tweede orde randwaardeproblemen. In de §§6-8 behandelen we de stuksgewijze Hermite-interpolatie met toepassingen op vierde orde randwaardeproblemen. In de §§9-12 behandelen we de tweedimensionale generalisatie van Lagrange- en Hermite-interpolatie. Tot slot worden in §13 de isoparametrische elementen en in §14 een globale foutschatting behandeld.

3.2. Stuksgewijze Lagrange-interpolatie

We verdelen een segment $[a,b]$ in N (niet noodzakelijk equidistante) deelsegmenten $e_j = [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \dots, N$, en geven deze verdeling aan met

$$(3.2.1) \quad \pi : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b.$$

Verder definiëren we

$$(3.2.2) \quad \begin{aligned} h_j &= x_j - x_{j-1}, \\ h &= \max_j h_j, \end{aligned}$$

waarbij we h de maaswijdte van π noemen.

Definitie 3.2.1 Onder $\mathbb{P}_k(\pi)$ verstaan we de verzameling van alle functies die

- (i) continu zijn op $[a,b]$;
- (ii) op ieder segment e_j een polynoom van de graad $\leq k$ zijn.

Het is duidelijk dat $\mathbb{P}_k(\pi)$ onder de definities van inproduct

$$(u, v)_1 = \int_a^b \left[\frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + u(x)v(x) \right] dx,$$

en norm

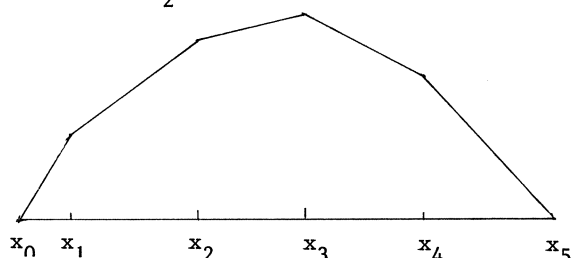
$$\|u\|_1 = \sqrt{(u, u)_1},$$

een deelruimte is van de separabele Hilbertruimte $H^1[a, b]$, de ruimte van functies waarvan de nulde en eerste afgeleide kwadratische integreerbaar zijn over $[a, b]$. Verder bevat $\mathbb{P}_k(\pi)$ alle polynomen van de graad $\leq k$. We geven $\mathbb{P}_k(\pi)$ soms ook aan met \mathbb{P}_k .

Om te bepalen hoe groot de dimensie van \mathbb{P}_k is en hoe de basisfuncties eruitzien, bekijken we de gevallen $k = 1, 2, 3$.

$$k = 1$$

Een element uit \mathbb{P}_2 is een stuksgewijs lineaire functie (zie fig. 3.1).

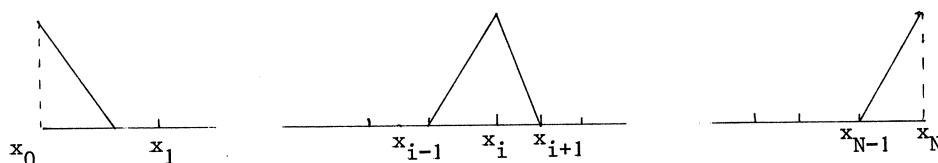


Figuur 3.1 Stuksgewijs lineaire functie

Het is evident dat ieder element uit \mathbb{P}_2 volkomen bepaald wordt door de waarden die het in de punten x_j aanneemt. Er zijn dus $N+1$ basisfuncties nodig, die we met ϕ_i aangeven. Een voor de hand liggende definitie van ϕ_i is de volgende:

$$(3.2.3) \quad \phi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad 0 \leq i, j \leq N,$$

waarbij δ_{ij} het Kronecker-symbool is. De functies die hieraan voldoen, zijn de zgn. "dakfuncties" (zie fig. 3.2).



Figuur 3.2 Dakfuncties $\phi_i(x)$

De basisfuncties $\phi_i(x)$ worden gegeven door de formules

$$\begin{aligned}
 \phi_0(x) &= \begin{cases} \frac{x-x_1}{x_0-x_1} = -(x-x_1)/h_1, & x_0 \leq x \leq x_1, \\ 0 & , \quad \text{elders;} \end{cases} \\
 (3.2.4) \quad \phi_i(x) &= \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} = (x-x_{i-1})/h_i, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} = -(x-x_{i+1})/h_{i+1}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & , \quad \text{elders, } i = 1, \dots, N-1; \end{cases} \\
 \phi_N(x) &= \begin{cases} \frac{x-x_{N-1}}{x_N-x_{N-1}} = (x-x_{N-1})/h_N, & x_{N-1} \leq x \leq x_N \\ 0 & , \quad \text{elders.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Uit bovenstaande formule blijkt dat $\phi_i(x)$ alleen $\neq 0$ is op die deelsegmenten waartoe x_i behoort. Hieruit volgt dat er op het deelsegment e_i slechts twee basisfuncties $\neq 0$ zijn, namelijk $\phi_{i-1}(x)$ en $\phi_i(x)$. Deze twee functies worden op e_i gegeven door de formules

$$\begin{aligned}
 \phi_{i-1}(x) &= 1 - (x-x_{i-1})/h_i; \\
 (3.2.5) \quad \phi_i(x) &= (x-x_{i-1})/h_i, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i.
 \end{aligned}$$

Uit (3.2.5) blijkt dat $\phi_i(x)$ en $\phi_{i-1}(x)$ op e_i lineaire functies zijn van

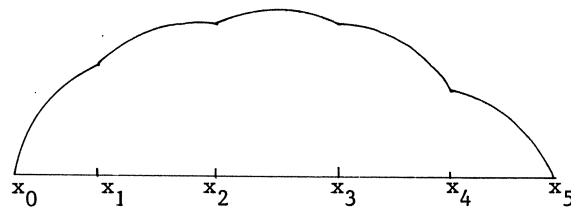
$$t = (x-x_{i-1})/h_i.$$

We merken nog op dat

$$\begin{aligned}
 \phi_i(x) &= \phi_{i-1}(x_i + x_{i-1} - x), \\
 (3.2.6) \quad \phi_{i-1}(x) &= \phi_i(x_i + x_{i-1} - x), \\
 1 &= \phi_i(x) + \phi_{i-1}(x), \quad x \in e_i.
 \end{aligned}$$

$$k = 2$$

Een element uit \mathbb{P}_2 is een stuksgewijs kwadratische funktie (zie fig. 3.3).



Figuur 3.3. Stuksgewijs kwadratische funktie

Een element uit \mathbb{P}_2 is nu niet meer alleen bepaald door de waarden die het in de punten x_0, \dots, x_N aanneemt, aangezien een parabool drie vrijheidsgraden heeft. We moeten op ieder segment e_j nog één extra punt kiezen en nemen daarvoor het middelpunt

$$x_{j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_{j-1} + x_j).$$

Andermaal kiezen we de basisfuncties $\phi_i(x)$ zo, dat geldt

$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, \frac{1}{2}, \dots, N.$$

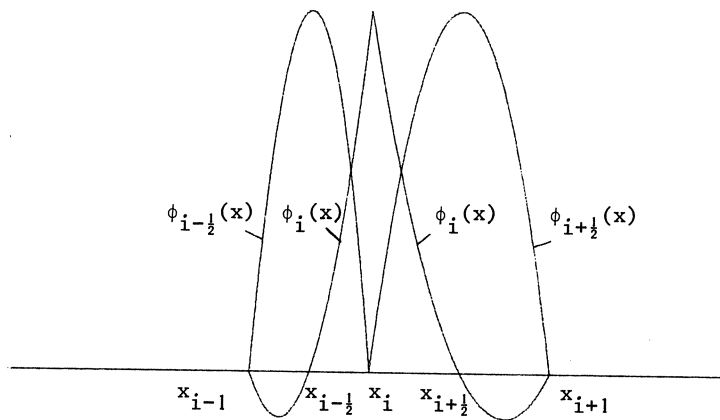
Het aantal basisfuncties van \mathbb{P}_2 is dus $2N+1$. Evenals in het geval $k = 1$ is $\phi_i(x)$ alleen $\neq 0$ op die segmenten waartoe x_i behoort (zie figuur 3.4).

We bekijken nu het segment $e_i = [x_{i-1}, x_i]$. Op dat segment zijn alleen $\phi_{i-1}(x)$, $\phi_{i-\frac{1}{2}}$ en $\phi_i(x)$ relevant. Passen we de transformatie

$$(3.2.7) \quad x = h_i t + x_{i-1}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

toe, dan vinden we de formules

$$\begin{aligned}
 \phi_{i-1}(x) &= (t-1)(2t-1) = \phi_0(t), \\
 \phi_{i-\frac{1}{2}}(x) &= 4t(1-t) = \phi_{\frac{1}{2}}(t), \\
 \phi_i(x) &= t(2t-1) = \phi_1(t), \\
 t &= (x-x_{i-1})/h_i, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i.
 \end{aligned}
 \tag{3.2.8}$$



Figuur 3.4 Grafiek van $\phi_{i-\frac{1}{2}}(x)$, $\phi_i(x)$ en $\phi_{i+\frac{1}{2}}(x)$

Blijkbaar zijn op het segment e_i de relevante basisfuncties polynoom in de variabele $t = (x-x_{i-1})/h_i$. Merk nog op dat (zie (3.2.6))

$$\begin{aligned}
 \phi_i(t) &= \phi_{1-i}(1-t), & i &= 0, \frac{1}{2}, 1; \\
 \phi_0(t) + \phi_{\frac{1}{2}}(t) + \phi_1(t) &= 1.
 \end{aligned}
 \tag{3.2.9}$$

$k = 3$

Dit gaat geheel analoog met $k = 2$. Op het segment e_i kiezen we nu *twee* inwendige punten, namelijk

$$\begin{aligned}
 x_{i-\frac{2}{3}} &= x_{i-1} + \frac{1}{3}h_i, \\
 x_{i-\frac{1}{3}} &= x_{i-1} + \frac{2}{3}h_i.
 \end{aligned}$$

Op het segment $[x_{i-1}, x_i]$ zijn de relevante basisfuncties nu als volgt gedefiniëerd:

$$\phi_{i-1}(x) = \phi_0(t) = -\frac{1}{2}(3t-1)(3t-2)(t-1),$$

$$\phi_{i-\frac{2}{3}}(x) = \phi_{\frac{1}{3}}(t) = \frac{9}{2}t(3t-2)(t-1),$$

$$\phi_{i-\frac{1}{3}}(x) = \phi_{\frac{2}{3}}(t) = -\frac{9}{2}t(3t-1)(t-1),$$

$$\phi_i(x) = \phi_1(t) = \frac{1}{2}t(3t-1)(3t-2),$$

$$t = (x-x_{i-1})/h_i, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i.$$

Merk op dat ook hier geldt:

$$(3.2.11) \quad \phi_i(t) = \phi_{1-i}(1-t), \quad i = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1,$$

$$1 = \phi_0(t) + \phi_{\frac{1}{3}}(t) + \phi_{\frac{2}{3}}(t) + \phi_1(t).$$

Algemeen kiezen we de basis van \mathbb{P}_K als volgt:

(i) Op het segment e_i kiezen we $k-1$ inwendige punten, die e_i in k *equidistante* deelsegmenten verdelen. Deze punten geven we aan met

$$x_{i-1+\frac{j}{k}} = x_{i-1} + \frac{j}{k} * h_i, \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, N; \\ j = 1, \dots, k-1. \end{array}$$

(ii) Op e_i is $\phi_{i-1+\frac{j}{k}}(x)$ als volgt gedefinieerd:

$$\phi_{i-1+\frac{j}{k}}(x) = \phi_{\frac{j}{k}}(t) = \prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq j}}^k \frac{kt-\ell}{\ell-j}, \quad \begin{array}{l} x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ t = (x-x_{i-1})/h_i, \\ i = 1, \dots, N; \\ j = 0, \dots, k. \end{array}$$

Ook hier gelden de relaties

$$(3.2.13) \quad \begin{array}{l} \phi_{\frac{j}{k}}(t) = \phi_{1-\frac{j}{k}}(1-t), \quad j = 0, \dots, k; \\ 1 = \sum_{j=0}^k \phi_{\frac{j}{k}}(t). \end{array}$$

3.3. Een variatieprobleem

We bekijken het volgende variatieprobleem: Minimaliseer de kwadratische funktionaal

$$(3.3.1a) \quad I(v) = \int_a^b \left[p(x) \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + q(x) [v(x)]^2 - 2f(x)v(x) \right] dx,$$

onder de nevenvoorwaarden

$$(3.3.1b) \quad v(a) = 0; \quad q(x) \text{ en } f(x) \text{ kontinu op } [a, b];$$

$$p(x) \geq p_0 > 0; \quad q(x) \geq 0; \quad p(x) \text{ kontinu differentieerbaar op } [a, b].$$

De oplossing u van (3.3.1) ligt in de separabele energieruimte H_L van functies waarvan de nulde en eerste afgeleide kwadratisch integreerbaar zijn over $[a, b]$, en die in a de waarde nul aannemen. In deze Hilbert-ruimte zijn het *energieinprodukt*

$$(3.3.2a) \quad (u, v)_L = \int_a^b \left[p(x) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + q(x) u(x) v(x) \right] dx$$

en de *energienorm*

$$(3.3.2b) \quad \|u\|_L = \sqrt{(u, u)_L}$$

gedefinieerd.

Voor de oplossing u van (3.3.1) geldt wegens

$$I(u + \epsilon v) \geq I(u), \quad \epsilon \text{ willekeurig, } v \in H_L,$$

dat

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{I(u + \epsilon v) - I(u)}{\epsilon} = 0, \quad v \in H_L.$$

Uitwerking hiervan geeft de zwakke Galerkin-vorm

$$(3.3.3) \quad \int_a^b \left[p(x) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + q(x) uv \right] dx = \int_a^b f(x) v dx;$$

$$(u, v)_L = (f, v), \quad \text{voor iedere } v \in H_L.$$

We beschouwen bij een verdeling

$$\pi = a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

met maaswijdte h de Hilbert-ruimte $\mathbb{P}_k(\pi)$ en definiëren

$$V_h = \{v \mid v \in \mathbb{P}_k(\pi), v(a) = 0\}.$$

Het is evident dat V_h een eindigdimensionale deelruimte is van H_L met dimensie kN . We zoeken nu een approximatie van de oplossing van (3.3.1) door het volgende probleem op te lossen: Minimaliseer $I(v_h)$, $v_h \in V_h$. De oplossing u_h van dit probleem voldoet eveneens aan de Galerkin-vorm

$$(3.3.3a) \quad (u_h, v_h)_L = (f, v_h), \quad \text{voor iedere } v_h \in V_h.$$

We passen dit toe voor $k=2$. De basisfuncties $\phi_{\frac{1}{2}}(x), \phi_1(x), \dots, \phi_{N-\frac{1}{2}}(x), \phi_N(x)$ van V_h zijn door de formules (3.2.7) - (3.2.8) gegeven. Voor de oplossing u_h geldt dan

$$(u_h, \phi_i)_L = (f, \phi_i), \quad i = \frac{1}{2}, 1, \dots, N.$$

Schrijven we

$$u_h(x) = \sum_{j=\frac{1}{2}}^N q_j \phi_j(x),$$

dan wordt $(q_{\frac{1}{2}}, q_1, \dots, q_N)^T$ bepaald door het lineaire stelsel

$$(3.3.4) \quad \sum_{j=\frac{1}{2}}^N (\phi_i, \phi_j)_L q_j = (f, \phi_i), \quad i = \frac{1}{2}, 1, \dots, N.$$

Het gaat dus in de eerste plaats om de berekening van de matrix $A = (a_{ij})$, gedefinieerd door

$$(3.3.5) \quad \begin{aligned} a_{ij} &= (\phi_i, \phi_j)_L = \int_a^b p(x) \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx + \int_a^b q(x) \phi_i(x) \phi_j(x) dx = \\ &= s_{ij} + m_{ij}, \quad i, j = \frac{1}{2}, 1, \dots, N, \end{aligned}$$

en de vektor $F = (F_i)$, gedefinieerd door

$$(3.3.6) \quad F_i = \int_a^b f(x) \phi_i(x) dx, \quad i = \frac{1}{2}, 1, \dots, N.$$

De matrices $S = (s_{ij})$ en $M = (m_{ij})$ heten respectievelijk stijfheidsmatrix en massamatrix. De vektor F wordt de belastingsvektor genoemd. Deze termen zijn afkomstig uit de structurele analyse.

3.4. Berekening van stijfheidsmatrix, massamatrix en belastingsvektor

Bij de berekening van de matrices S en M en de vektor F maken we gebruik van het feit dat er op ieder segment *hoogstens drie* basisfuncties $\neq 0$ zijn.

Dit betekent dat het stelsel $\{\phi_i(x)\}$ "bijna orthogonaal" is, want $\phi_i(x)\phi_j(x)$ en $\phi_i'(x)\phi_j'(x)$ zijn alleen $\neq 0$, als x_i en x_j tot hetzelfde segment behoren. We bekijken nu de stijfheidsmatrix $S = (s_{ij})$, gedefinieerd door

$$s_{ij} = \int_a^b p(x) \phi_i'(x) \phi_j'(x) dx.$$

We kunnen S hier schrijven als

$$S = \sum_{k=1}^N S^{(k)},$$

waarbij

$$(3.4.1) \quad s_{ij}^{(k)} = \int_{e_k} p(x) \phi_i'(x) \phi_j'(x) dx.$$

$S^{(k)}$ noemen we de k de *elementstijfheidsmatrix*. Aangezien op e_k alleen de basisfuncties $\phi_{k-1}, \phi_{k-\frac{1}{2}}$ en ϕ_k relevant zijn, bestaat $S^{(k)}$, op één klein vierkantje na, geheel uit nullen:

$$S^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & * & * & * \\ 0 & * & * & * & 0 \\ & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow k-1 \\ \leftarrow k-\frac{1}{2} \\ \leftarrow k \end{matrix}.$$

Om de notatie te vereenvoudigen, geven we in het vervolg $S^{(k)}$ aan met

$$S^{(k)} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow k-1 \\ \leftarrow k-\frac{1}{2} \\ \leftarrow k \end{matrix}.$$

Op een analoge manier definiëren we de *elementmassamatrix*

$$(3.4.2) \quad M^{(k)} = \left(\int_{e_k} q(x) \phi_i(x) \phi_j(x) dx \right)$$

en de *elementbelastingsvektor*

$$(3.4.3) \quad F^{(k)} = \left(\int_{e_k} f(x) \phi_i(x) dx \right).$$

Bij de berekening van de elementstijfheidsmatrix $S^{(k)}$, de elementmassamatrix $M^{(k)}$ en de elementbelastingsvektor $F^{(k)}$ maken we gebruik van de lineaire transformatie $x = h_k t + x_{k-1}$, $0 \leq t \leq 1$. Met behulp van formule (3.2.8) verkrijgen we dan de volgende formules (we gebruiken nu *lokale indices*)

$$(3.4.4) \quad S^{(k)} = \left(\frac{1}{h_k} \int_0^1 p(h_k t + x_{k-1}) \frac{d\phi_i}{dt} \frac{d\phi_j}{dt} dt \right);$$

$$(3.4.5) \quad M^{(k)} = \left(h_k \int_0^1 q(h_k t + x_{k-1}) \phi_i(t) \phi_j(t) dt \right);$$

$$(3.4.6) \quad F^{(k)} = \left(h_k \int_0^1 f(h_k t + x_{k-1}) \phi_i(t) dt \right),$$

waarbij $\phi_i(t)$ ($i=0, \frac{1}{2}, 1$) door (3.2.8) gegeven is. Voor $k=1$ krijgen we 2×2 i.p.v. 3×3 matrices $S^{(1)}$ en $M^{(1)}$ en een tweedimensionale vektor $F^{(1)}$, omdat $\phi_0(t)$ dan niet meedoet.

Bij de berekening van de elementstijfheidsmatrix maken we gebruik van het feit dat

$$\phi_0(t) + \phi_{\frac{1}{2}}(t) + \phi_1(t) = 1,$$

zodat voor $\phi_{\frac{1}{2}}(t)$ geldt

$$\frac{d}{dt} \phi_{\frac{1}{2}}(t) = - \frac{d\phi_0}{dt} - \frac{d\phi_1}{dt}.$$

Als gevolg hiervan is de matrix $S^{(k)}$ te schrijven als

(3.4.10)

3.5. Statische condensatie

lineair stelsel van de vorm

(3.5.1)

$\mathbb{P}_k(\pi)$ benaderen, een stelsel vergelijkingen oplossen van de vorm

(3.5.2)

We bespreken nu een methode om lineaire stelsels van de vorm (3.5.2) voor $k > 1$ te reduceren tot *tridiagonale* stelsels, door u_i met gebroken indices *vooraf* te elimineren. Deze methode wordt door fysici *statistische kondensatie* genoemd. We illustreren e.e.a. voor $k=2$.

Voor componenten met halftallige index luidt vergelijking (3.5.1)

$$a_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}u_{\frac{1}{2}} + a_{\frac{1}{2},1}u_1 = F_{\frac{1}{2}},$$

$$a_{i-\frac{1}{2},i-1}u_{i-1} + a_{i-\frac{1}{2},i-\frac{1}{2}}u_{i-\frac{1}{2}} + a_{i-\frac{1}{2},i}u_i = F_{i-\frac{1}{2}}, \quad i = 2, \dots, N,$$

ofwel

$$(3.5.3) \quad \begin{aligned} u_{\frac{1}{2}} &= \frac{F_{\frac{1}{2}} - a_{\frac{1}{2},1}u_1}{a_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}}, \\ u_{i-\frac{1}{2}} &= \frac{F_{i-\frac{1}{2}} - a_{i-\frac{1}{2},i-1}u_{i-1} - a_{i-\frac{1}{2},i}u_i}{a_{i-\frac{1}{2},i-\frac{1}{2}}}, \quad i > 1. \end{aligned}$$

Vergelijking (3.5.1) voor componenten met geheeltallige indices is

$$(3.5.4) \quad \begin{aligned} &a_{1,\frac{1}{2}}u_{\frac{1}{2}} + a_{1,1}u_1 + a_{1,1\frac{1}{2}}u_{1\frac{1}{2}} + a_{1,2}u_2 = F_1; \\ &a_{i,i-1}u_{i-1} + a_{i,i-\frac{1}{2}}u_{i-\frac{1}{2}} + a_{i,i}u_i + \\ &\quad + a_{i,i+\frac{1}{2}}u_{i+\frac{1}{2}} + a_{i,i+1}u_{i+1} = F_i, \quad 1 < i < N; \\ &a_{N,N-1}u_{N-1} + a_{N,N-\frac{1}{2}}u_{N-\frac{1}{2}} + a_{N,N}u_N = F_N. \end{aligned}$$

Substitueren we (3.5.3) in (3.5.4), dan krijgen we

$$(3.5.5) \quad \begin{aligned} &\left(a_{1,1} - \frac{a_{1,\frac{1}{2}}a_{\frac{1}{2},1}}{a_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}} - \frac{a_{1,1\frac{1}{2}}a_{1\frac{1}{2},1}}{a_{1\frac{1}{2},1\frac{1}{2}}}\right)u_1 + \\ &+ \left(a_{1,2} - \frac{a_{1,1\frac{1}{2}}a_{1\frac{1}{2},2}}{a_{1\frac{1}{2},1\frac{1}{2}}}\right)u_2 = F_1 - \frac{a_{1,\frac{1}{2}}F_{\frac{1}{2}}}{a_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}}; \\ &\left(a_{i,i-1} - \frac{a_{i,i-\frac{1}{2}}a_{i-\frac{1}{2},i-1}}{a_{i-\frac{1}{2},i-\frac{1}{2}}}\right)u_{i-1} \\ &+ \left(a_{i,i} - \frac{a_{i,i-\frac{1}{2}}a_{i-\frac{1}{2},i}}{a_{i-\frac{1}{2},i-\frac{1}{2}}} - \frac{a_{i,i+\frac{1}{2}}a_{i+\frac{1}{2},i}}{a_{i+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}}}\right)u_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(a_{i,i+1} - \frac{a_{i,i+\frac{1}{2}} a_{i+\frac{1}{2},i+1}}{a_{i+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}}} \right) u_{i+1} = \\
& = F_i - \frac{a_{i,i-\frac{1}{2}} F_{i-\frac{1}{2}}}{a_{i-\frac{1}{2},i-\frac{1}{2}}} - \frac{a_{i,i+\frac{1}{2}} F_{i+\frac{1}{2}}}{a_{i+\frac{1}{2},i+\frac{1}{2}}}, \quad 1 < i < N; \\
& \left(a_{N,N-1} - \frac{a_{N,N-\frac{1}{2}} a_{N-\frac{1}{2},N-1}}{a_{N-\frac{1}{2},N-\frac{1}{2}}} \right) u_{N-1} \\
& + \left(a_{N,N} - \frac{a_{N,N-\frac{1}{2}} a_{N-\frac{1}{2},N}}{a_{N-\frac{1}{2},N-\frac{1}{2}}} \right) u_N = F_N - \frac{a_{N,N-\frac{1}{2}} F_{N-\frac{1}{2}}}{a_{N-\frac{1}{2},N-\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

De matrixelementen a_{ij} en de vektorkomponenten F_i met geheeltallige i en j ondergaan dus transformaties van de vorm

$$\begin{aligned}
a_{i,i} & \rightarrow a_{i,i} + (\dots) a_{i-\frac{1}{2},i} + (\dots) a_{i+\frac{1}{2},i}, \\
a_{i,i-1} & \rightarrow a_{i,i-1} + (\dots) a_{i-\frac{1}{2},i-1}, \\
a_{i,i+1} & \rightarrow a_{i,i+1} + (\dots) a_{i+\frac{1}{2},i+1}, \\
F_i & \rightarrow F_i + (\dots) F_{i-\frac{1}{2}} + (\dots) F_{i+\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

waarbij de coëfficiënten (...) uit (3.3.5) afgeleid kunnen worden. Het interessante van deze transformatie is dat ze, evenals de evaluatie van de matrix (a_{ij}) en de belastingsvektor (F_i), segmentsgewijs uitgevoerd kan worden. We illustreren dit met de volgende afbeeldingen, waarbij we lokale indices gebruiken:

$$\begin{aligned}
A^{(k)} &= \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,\frac{1}{2}} & a_{0,1} \\ a_{\frac{1}{2},0} & a_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} & a_{\frac{1}{2},1} \\ a_{1,0} & a_{1,\frac{1}{2}} & a_{1,1} \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow k-1 \\ \leftarrow k-\frac{1}{2} \\ \leftarrow k \end{matrix}, \\
F^{(k)} &= \begin{bmatrix} F_0 \\ F_{\frac{1}{2}} \\ F_1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow k-1 \\ \leftarrow k-\frac{1}{2} \\ \leftarrow k \end{matrix}, \\
A^{(1)} &= \begin{bmatrix} a_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} & a_{\frac{1}{2},1} \\ a_{1,\frac{1}{2}} & a_{1,1} \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \frac{1}{2} \\ \leftarrow 1 \end{matrix}, \\
F^{(1)} &= \begin{bmatrix} F_{\frac{1}{2}} \\ F_1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \frac{1}{2} \\ \leftarrow 1 \end{matrix}.
\end{aligned}$$

De elementmatrices en -vektoren ondergaan dan de volgende verschuivingen:

$$\begin{aligned}
 A^{(k)} &\rightarrow \begin{bmatrix} a_{0,0} - \frac{a_{0,\frac{1}{2}}a_{\frac{1}{2},0}}{a_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}} & a_{0,1} - \frac{a_{0,\frac{1}{2}}a_{\frac{1}{2},1}}{a_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}} \\ a_{1,0} - \frac{a_{1,\frac{1}{2}}a_{\frac{1}{2},0}}{a_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}} & a_{1,1} - \frac{a_{1,\frac{1}{2}}a_{\frac{1}{2},1}}{a_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}} \end{bmatrix} = C^{(k)}, \quad k > 1, \\
 F^{(k)} &\rightarrow \begin{bmatrix} F_0 - \frac{a_{0,\frac{1}{2}}F_{\frac{1}{2}}}{a_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}} \\ F_1 - \frac{a_{1,\frac{1}{2}}F_{\frac{1}{2}}}{a_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}} \end{bmatrix} = G^{(k)}, \quad k > 1, \\
 A^{(1)} &\rightarrow \begin{bmatrix} a_{1,1} - \frac{a_{1,\frac{1}{2}}a_{\frac{1}{2},1}}{a_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}} \end{bmatrix} = C^{(1)}, \\
 F^{(1)} &\rightarrow \begin{bmatrix} F_1 - \frac{a_{1,\frac{1}{2}}F_{\frac{1}{2}}}{a_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}} \end{bmatrix} = G^{(1)}.
 \end{aligned}$$

We kunnen nu (3.5.5) als volgt schrijven:

$$Cv = G,$$

met

$$v = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T,$$

$$C = \sum_{k=1}^N C^{(k)},$$

$$G = \sum_{k=1}^N G^{(k)}.$$

Voor $k > 2$ gaat de condensatie analoog, zij het ingewikkelder. We gaan hier niet op in omdat het een al te technische kwestie is.

3.6. Stuksgewijze Hermite-interpolatie

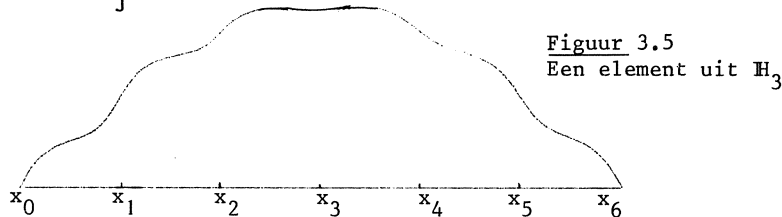
We brengen weer een verdeling π aan van het interval $[a, b]$. Deze verdeling heeft de maaswijde $h = \max(x_j - x_{j-1})$.

DEFINITIE 3.6.1 Onder $H_k(\pi)$ verstaan we de verzameling van alle functies die

- (i) een continue nulde en eerste afgeleide op $[a,b]$ hebben;
- (ii) op ieder segment e_j een polynoom van de graad $\leq k$ zijn.

Uit het feit dat een element van $H_k(\pi)$ op ieder segment e_j vier vrijheidsgraden heeft, volgt dat $k \geq 3$ moet zijn. We bekijken in deze sectie alleen $H_3(\pi)$, ook wel aangegeven met H_3 .

Een element H_3 is een stuksgewijs kubische funktie, die in de knooppunten x_j een continue nulde en eerste afgeleide heeft.



Figuur 3.5
Een element uit H_3

Een element uit H_3 is volledig bepaald door de waarden van de nulde en eerste afgeleide in de punten x_0, \dots, x_N . Aangezien in ieder punt aan twee kondities moet worden voldaan, worden de punten x_0, \dots, x_N in het geval van de H_3 *dubbele knooppunten* genoemd.

Het is eenvoudig in te zien dat de H_3 een eindigdimensionale deelruimte van de $H^2[a,b]$ is, i.e. de klasse van functies waarvan de nulde, eerste en tweede afgeleide kwadratisch integreerbaar zijn over $[a,b]$. In deze ruimte zijn het inproduct

$$(3.6.1a) \quad (u,v)_2 = \int_a^b [u''v'' + u'v' + uv] dx$$

en de norm

$$(3.6.1b) \quad \|u\|_2 = \sqrt{(u,u)_2}$$

gedefinieerd.

De basisfuncties van H_3 zijn verdeeld in twee klassen:

- (i) de functies $\phi_i(x)$ die in alle punten de afgeleide nul hebben, in x_i de funktiewaarde 1 hebben en in alle overige punten de funktiewaarde nul hebben: $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ en $\phi_i'(x_j) = 0$, $0 \leq i, j \leq N$;
- (ii) de functies $\psi_i(x)$ die in alle punten de funktiewaarde nul hebben, in het punt x_i de afgeleide 1 hebben en in alle overige punten de funktiewaarde 0: $\psi_i(x_j) = 0$ en $\psi_i'(x_j) = \delta_{ij}$, $0 \leq i, j \leq N$.

Iedere $v_h \in \mathbb{H}_3$ kan nu als volgt worden gerepresenteerd:

$$(3.6.2) \quad \begin{aligned} v_h(x) &= \sum_{j=0}^N [q_j \phi_j(x) + r_j \psi_j(x)], \\ q_j &= v_h(x_j), \\ r_j &= v'_h(x_j), \quad j = 0, \dots, N. \end{aligned}$$

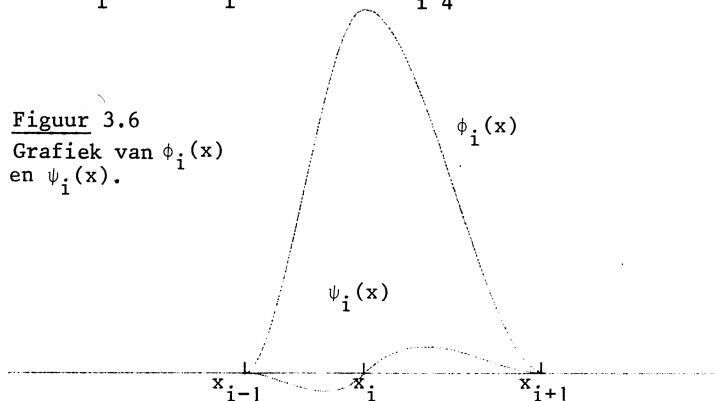
Ook hier zijn de basisfuncties $\phi_i(x)$ en $\psi_i(x)$ alleen $\neq 0$ op die segmenten e_i waartoe x_i behoort, dus op hooguit twee segmenten. Op ieder segment $e_i = [x_{i-1}, x_i]$ zijn zo alleen de basisfuncties $\phi_{i-1}(x)$, $\psi_{i-1}(x)$, $\phi_i(x)$ en $\psi_i(x)$ relevant. We geven hieronder de formules van deze basisfuncties:

$$(3.6.3) \quad \begin{aligned} \phi_{i-1}(x) &= \left(\frac{x-x_i}{h_i} \right)^2 \left(2 \frac{x-x_{i-1}}{h_i} + 1 \right), \\ \psi_{i-1}(x) &= \left(\frac{x-x_i}{h_i} \right)^2 (x-x_{i-1}), \\ \phi_i(x) &= \left(\frac{x-x_{i-1}}{h_i} \right)^2 \left(2 \frac{x-x_i}{h_i} - 1 \right), \\ \psi_i(x) &= \left(\frac{x-x_{i-1}}{h_i} \right)^2 (x-x_i), \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i. \end{aligned}$$

Substitueren we $x = h_i t + x_{i-1}$, $0 \leq t \leq 1$, dan gaat formule (3.6.3) over in

$$(3.6.4) \quad \begin{aligned} \phi_{i-1}(x) &= (t-1)^2(2t+1) = \phi_1(t), \\ \psi_{i-1}(x) &= h_i t(t-1)^2 = h_i \phi_2(t), \\ \phi_i(x) &= t^2(3-2t) = \phi_3(t), \\ \psi_i(x) &= h_i t^2(t-1) = h_i \phi_4(t). \end{aligned}$$

Figuur 3.6
Grafiek van $\phi_i(x)$
en $\psi_i(x)$.



We zien nu een belangrijk verschil tussen de basisfuncties ϕ_i en ψ_i . De eerste zijn derdegraadspolynomen in t , terwijl de laatste eveneens derdegraadspolynomen in t zijn, maar *vermenigvuldigd met h_i* . Die vermenigvuldiging is nodig om de invloed van de transformatie op de differentiatie ongedaan te maken.

We merken nog op dat

$$\begin{aligned} \phi_3(t) &= \phi_1(1-t) = 1 - \phi_1(t), \\ (3.6.5) \quad \phi_4(t) &= -\phi_2(1-t). \end{aligned}$$

Bij een gegeven verdeling π van $[a, b]$ is de basis van $\mathbb{H}_3(\pi)$ dus volledig bepaald door de "superfuncties" ϕ_1 en ϕ_2 en door de getallen $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, N$.

3.7. Tweede orde variatieproblemen

Gegeven het variatieprobleem: minimaliseer

$$(3.7.1) \quad I(v) = \int_a^b \left[p(x)[v''(x)]^2 + q(x)[v'(x)]^2 + r(x)[v(x)]^2 - 2f(x)v(x) \right] dx,$$

onder de nevenvoorwaarden

$$v(a) = v'(a) = 0,$$

$$(3.7.1a) \quad p \in H^2[a, b], \quad q(x) \in H^1[a, b], \quad r(x), f(x) \in H^0[a, b],$$

$$p(x) \geq p_0 > 0, \quad q(x), r(x) \geq 0.$$

Volgens de theorie van hoofdstuk 2 heeft (3.7.1) een oplossing in de separabele energieruimte

$$H_M = \{v \mid v \in H^2[a, b]; v(a) = v'(a) = 0\}.$$

In deze ruimte definiëren we het energieinproduct

$$(3.7.2a) \quad (u, v)_M = \int_a^b \left[p(x)u''(x)v''(x) + q(x)u'(x)v'(x) + r(x)u(x)v(x) \right] dx$$

en de energienorm

$$(3.7.2b) \quad \|u\|_M = \sqrt{(u,u)_M}.$$

We willen nu voor de oplossing u van (3.7.1) een approximatie u_h in een eindigdimensionale deelruimte V_h van H_M berekenen. We definiëren V_h als volgt:

$$V_h = \{v \mid v \in H_3(\pi); v(a) = v'(a) = 0\},$$

waarbij π een verdeling van $[a,b]$ is met maaswijdte h . Het is gemakkelijk na te gaan dat V_h met definitie (3.7.2) van inproduct en norm een eindigdimensionale deelruimte van H_M is.

We kunnen nu voor probleem (3.7.1) op twee manieren een approximatie berekenen:

(i) minimaliseer

$$(3.7.3) \quad I(v_h), \quad v_h \in V_h;$$

(ii) minimaliseer

$$(3.7.4) \quad I(v_h), \quad v_h \in H_3(\pi),$$

onder de voorwaarden

$$(3.7.4a) \quad v_h(a) = v_h'(a) = 0.$$

De laatste aanpak is equivalent aan de eerste, aangezien V_h een deelruimte van $H_3(\pi)$ is. Evenwel kan (ii) ook toegepast worden in het geval van inhomogene randvoorwaarden, zodat (ii) programmeertechnisch te verkiezen is.

Voor het gemak worden alle basisfuncties van H_3 nu aangegeven met de letter ϕ . Met $\phi_{2i}(x)$ geven we de oorspronkelijke functies $\phi_i(x)$ uit 3.6 aan, met $\phi_{2i+1}(x)$ geven we de functies $\psi_i(x)$ uit 3.6 aan. Voor $\phi_i(x)$ gelden dan de relaties

$$(3.7.5) \quad \begin{aligned} \phi_{2i}(x_j) &= \phi'_{2i+1}(x_j) = \delta_{ij}, \\ \phi'_{2i}(x_j) &= \phi_{2i+1}(x_j) = 0, \end{aligned} \quad 0 \leq i, j \leq N.$$

Dit betekent dat op het interval $[x_{i-1}, x_i]$ de functies ϕ_{2i-2} , ϕ_{2i-1} , ϕ_{2i} en ϕ_{2i+1} als volgt zijn gedefinieerd (zie ook 3.6.4):

$$\begin{aligned}
 \phi_{2i-2}(x) &= \phi_1(t) & , \\
 \phi_{2i-1}(x) &= h_i \phi_2(t) & , \\
 \phi_{2i}(x) &= 1 - \phi_1(t) = \phi_3(t) & , \\
 \phi_{2i+1}(x) &= h_i \phi_4(t) & .
 \end{aligned}
 \tag{3.7.6}$$

Schrijven we nu

$$v_h(x) = \sum_{i=0}^{2N+1} a_i \phi_i(x),$$

dan gaat (3.7.4) over in: minimaliseer

$$I(v_h) = G(a_0, a_1, \dots, a_{2N+1})$$

onder de nevenvoorwaarden

$$a_0 = a_1 = 0.$$

De oplossingsvektor $(q_0, q_1, \dots, q_{2N+1})^T$ wordt gegeven door

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial G}{\partial a_i} \right|_{a_i = q_i} &= 0, & i = 2, \dots, 2N+1, \\
 q_0 &= q_1 = 0.
 \end{aligned}$$

Uitwerking hiervan geeft het lineaire stelsel

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^{2N+1} (\phi_i, \phi_j)_M q_j &= (f, \phi_i), & i = 2, \dots, 2N+1, \\
 q_i &= 0, & i = 0, 1.
 \end{aligned}
 \tag{3.7.7a}$$

De matrix van het stelsel (3.7.7a) is asymmetrisch. We maken hem symmetrisch door (3.7.7a) om te zetten in

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=2}^{2N+1} (\phi_i, \phi_j)_M u_j &= (f, \phi_i) - \sum_{j=0}^1 (\phi_i, \phi_j)_M u_j, & i = 2, \dots, 2N+1. \\
 u_0 &= u_1 = 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.7.7b}$$

Formule (3.7.7b) doet nogal overbodig aan. Immers $u_0 = u_1 = 0$, zodat er in feite niets wordt opgeteld bij het rechterlid van (3.7.7a). Hebben we evenwel te doen met *inhomogene* randvoorwaarden, dan blijkt (3.7.7b) een vrij zinvolle formule. We gaan dan als volgt te werk:

- (i) eerst worden de matrix $A^* = ((\phi_i, \phi_j)_M)$ en de vektor $F^* = ((f, \phi_i))$ segmentsgewijs geëvalueerd;
- (ii) vervolgens worden de inhomogene randvoorwaarden $q_0 = \alpha$, $q_1 = \beta$ geïmplementeerd door de matrix $A = (a_{ij})$ en de vektor $F = (F_i)$ als volgt te definiëren (zie ook 2.8):

$$(3.7.8) \quad \begin{aligned} a_{ij} &= \begin{cases} \delta_{ij} & , & i = 0, 1, \quad j = 0, \dots, 2N+1, \\ (\phi_i, \phi_j)_M & , & i = 2, \dots, 2N+1, \quad j = 0, \dots, 2N+1, \end{cases} \\ F_i &= \begin{cases} (f, \phi_i) - (\phi_i, \phi_0)q_0 - (\phi_i, \phi_1)q_1, & i > 1, \\ u_i, & i = 0, 1. \end{cases} \end{aligned}$$

De oplossing van (3.7.7b) is nu identiek met de oplossing van

$$Aq = F,$$

waarbij A en F door (3.7.8) worden gegeven.

De hierboven beschreven methode is vooral goed hanteerbaar in het geval van meerdimensionale minimaliseringproblemen, als er sprake is van verschillende randvoorwaarden.

Berekening van A

We bouwen A elementsgewijs op. Voor $A^{(k)}$ geldt de formule

$$a_{ij}^{(k)} = \int_{e_k} \left[p(x) \phi_i'' \phi_j'' + q(x) \phi_i' \phi_j' + r(x) \phi_i \phi_j \right] dx,$$

vervolgens passen we de transformatie $x = h_K t + x_{K-1}$ toe en we gebruiken weer lokale indices. Met behulp van formule (3.6.4) krijgen we

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{11} & h_k a_{12} & a_{13} & h_k a_{14} \\ h_k a_{12} & h_k^2 a_{22} & h_k a_{23} & h_k^2 a_{24} \\ a_{13} & h_k a_{13} & a_{33} & h_k a_{34} \\ h_k a_{14} & h_k^2 a_{24} & h_k a_{34} & h_k^2 a_{44} \end{bmatrix},$$

waarbij

$$\begin{aligned}
 a_{ij} &= \frac{1}{h_k} \int_0^1 p(h_k t + x_{k-1}) \frac{d^2 \phi_i}{dt^2} \frac{d^2 \phi_j}{dt^2} dt \\
 &+ \frac{1}{h_k} \int_0^1 q(h_k t + x_{k-1}) \frac{d \phi_i}{dt} \frac{d \phi_j}{dt} dt \\
 (3.7.9) \quad &+ h_k \int_0^1 r(h_k t + x_{k-1}) \phi_i(t) \phi_j(t) dt \\
 &= \frac{1}{h_k} b_{ij} + \frac{1}{h_k} s_{ij} + h_k m_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq 4.
 \end{aligned}$$

De matrices (b_{ij}) , (s_{ij}) en (m_{ij}) heten respectievelijk *elementbuigingsmatrix*, *elementstijfheidsmatrix* en *elementmassamatrix*. Voor de elementbelastingenvektor $F^{(k)}$ kunnen we de formule

$$F^{(k)} = h_k \begin{bmatrix} F_1 \\ h_k F_2 \\ F_3 \\ h_k F_4 \end{bmatrix}$$

afleiden, waarbij

$$(3.7.10) \quad F_i = \int_0^1 f(h_k t + x_{k-1}) \phi_i(t) dt, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

We merken op dat de elementbuigingsmatrix $B^{(k)}$ dubbel singulier is (0 is dubbele eigenwaarde). Er geldt namelijk

$$\phi_1(t) + \phi_3(t) = 1,$$

$$\phi_2(t) + \phi_3(t) + \phi_4(t) = t,$$

waaruit na toepassing van (3.7.9) volgt dat

$$b_{i1} + b_{i3} = 0,$$

$$b_{i2} + b_{i3} + b_{i4} = 0, \quad i = 1, \dots, 4.$$

Verder is de elementstijfheidsmatrix $S^{(k)}$ enkelvoudig singulier.

Tot slot van deze sectie geven we de formules voor $B^{(k)}$, $S^{(k)}$ en $M^{(k)}$ in het geval $p(x) \equiv p_0$, $q(x) \equiv q_0$, $r(x) \equiv r_0$ (zie ook STRANG & FIX [1973]). We veronderstellen $h_k = h$, $k = 1, \dots, N$.

$$(3.7.11) \quad \begin{aligned} B^{(k)} &= \frac{p_0}{h^3} \begin{bmatrix} 12 & 6h & -12 & 6h \\ 6h & 4h^2 & -6h & 2h^2 \\ -12 & -6h & 12 & -6h \\ 6h & 2h^2 & -6h & 4h^2 \end{bmatrix} ; \\ S^{(k)} &= \frac{q_0}{30h} \begin{bmatrix} 36 & 3h & -36 & 3h \\ 3h & 4h^2 & -3h & -h^2 \\ -36 & -3h & 36 & -3h \\ 3h & -h^2 & -3h & 4h^2 \end{bmatrix} ; \\ M^{(k)} &= \frac{hr_0}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22h & 54 & -13h \\ 22h & 4h^2 & 13h & -3h^2 \\ 54 & 13h & 156 & -22h \\ -13h & -3h^2 & -22h & 4h^2 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

3.8. Voorbeeld

We willen het volgende probleem oplossen: minimaliseer

$$(3.8.1) \quad I(v) = \int_0^1 [v''(x)]^2 + 2[v'(x)]^2 + [v(x)]^2 - 2v(x) \, dx,$$

$$v(0) = v(1) = v'(0) = v'(1) = 0.$$

Het daaruit voortkomende randwaardeprobleem

$$u^{iv} - 2u'' + u = 1, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0$$

heeft de analytische oplossing

$$\begin{aligned}
 u(x) &= 1 + e^x(c_1 + c_2 x) + e^{-x}(c_3 + c_4 x), \\
 c_1 &= - \frac{(2e-1)(e^2-2e-1)}{e^4-6e^2+1}, \\
 (3.8.2) \quad c_2 &= \frac{(e-1)(e^2-2e-1)}{e^4-6e^2+1}, \\
 c_3 &= -1 - c_1, \\
 c_4 &= c_3 - c_1 - c_2.
 \end{aligned}$$

Zij

$$\pi : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$$

een uniforme partitie van $[0,1]$, i.e. $x_i = hi$, $i = 0, \dots, N$, $h = 1/N$. We benaderen de oplossing van (3.8.1) door het volgende probleem op te lossen: Minimaliseer

$$\begin{aligned}
 (3.8.3) \quad & I(v_h), \quad v_h \in \mathbb{H}_3(\pi), \\
 & v_h(0) = v_h'(0) = v_h(1) = v_h'(1).
 \end{aligned}$$

De oplossing u_h van (3.8.3) wordt gegeven door

$$u_h(x) = \sum_{j=0}^{2N+1} q_j \phi_j(x),$$

waarbij $(q_0, q_1, \dots, q_{2N}, q_{2N+1})$ bepaald wordt door het lineaire stelsel

$$(3.8.4) \quad \sum_{j=0}^{2N+1} a_{ij} q_j = F_i, \quad i = 0, \dots, 2N+1.$$

(a_{ij}) en (F_i) worden gegeven door

$$\begin{aligned}
 a_{ij} &= \begin{cases} \delta_{ij}, & i = 0, 1, 2N, 2N+1, \\ & j = 0, \dots, 2N+1; \\ \int_0^1 [\phi_i'' \phi_j'' + 2\phi_i' \phi_j' + \phi_i \phi_j] dx, & i = 2, \dots, 2N-1, \\ & j = 0, \dots, 2N+1. \end{cases} \\
 F_i &= \begin{cases} 0, & i = 0, 1, 2N, 2N+1, \\ \int_0^1 \phi_i dx, & i = 2, \dots, 2N-1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

We bouwen $(a_{i,j})$ en (F_i) elementsgewijs op met behulp van de formules (3.7.8) - (3.7.12). We vinden dan voor de belastingsvektor F en de *boven-driehoek* van de symmetrische matrix A de volgende waarden:

$$a_{2i,2i} = \begin{matrix} 1 & , & i = 0, N, \\ \frac{24}{h^3} + \frac{24}{5h} + \frac{26}{35}h, & i = 1, \dots, N-1; \end{matrix}$$

$$a_{2i,2i+1} = \begin{matrix} 0 & , & i = 0, N-1, N, \\ -\frac{12}{h^3} - \frac{12}{5h} + \frac{9}{70}h, & i = 1, \dots, N-2. \end{matrix}$$

$$a_{2i,2i+2} = \begin{matrix} 0 & , & i = 0, N-1, N, \\ \frac{6}{h^2} + \frac{1}{5} - \frac{13}{420}h^2, & i = 1, \dots, N-2; \end{matrix}$$

$$a_{2i-1,2i-1} = \begin{matrix} 1 & i = 1, N, \\ \frac{8}{h} + \frac{8}{15}h + \frac{2}{105}h^3, & i = 2, \dots, N-1; \end{matrix}$$

$$a_{2i-1,2i+1} = \begin{matrix} 0 & i = 1, N-1, \\ \frac{2}{h} - \frac{h}{15} - \frac{h^3}{140}, & i = 2, \dots, N-2; \end{matrix}$$

$$a_{i,j} = 0, \text{ alle overige waarden van } i \text{ en } j;$$

$$F_i = \begin{matrix} 0 & , & i = 0, 1, 3, 5, \dots, 2N-1, 2N, \\ h & , & i = 2, 4, 6, \dots, 2N-2. \end{matrix}$$

Enige resultaten:

N	$\max_i u(x_i) - u_h(x_i) $	$\max_i u'(x_i) - u'_h(x_i) $
10	9.47_{10}^{-10}	3.07_{10}^{-9}
20	6.15_{10}^{-11}	1.91_{10}^{-10}
40	3.40_{10}^{-12}	1.07_{10}^{-11}

Merk op dat de maximale fout in de funktiewaarde en de afgeleide met ca. 16 afneemt, als N wordt verdubbeld (en h gehalveerd). Blijkbaar is de orde van nauwkeurigheid in de roosterpunten gelijk aan 4. Deze *lokale* fouten zijn nauwkeuriger dan de *globale* fout die voor de funktiewaarde van de orde 4 is en voor de afgeleide van de orde 3. Samengevat:

$$(3.8.5) \quad \begin{aligned} \|u - u_h\|_{\ell} &\leq C \|u\|_4 h^{4-\ell}, \quad \ell = 0, 1; \\ \left| \frac{d^{\ell}}{dx^{\ell}} (u - u_h)(x_i) \right| &\leq C \|u\|_4 h^4, \quad \ell = 0, 1; i = 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Dit wordt bewezen in BAKKER [1976]. Zie voor meer "superkonvergentie" het volgende hoofdstuk.

3.9. Tweedimensionale variatieproblemen

Bij het oplossen van tweedimensionale randwaardeproblemen of daarmee ekwivalente variatieproblemen door middel van de eindige elementenmethode doen zich een aantal problemen voor die in het eendimensionale geval onbekend zijn.

- (i) Een gebied Ω kan op verschillende manieren in kleine deelgebieden of elementen worden verdeeld, bijv. in driehoeken, vierhoeken of elementen met kromme randen.
- (ii) Wanneer Ω een kromme rand heeft, is een partitie van Ω in driehoeken niet mogelijk. We kunnen in dat geval gebruik maken van de zgn. isoparametrische elementen. Behalve in § 3.13, waar we de isoparametrische

behandelen, veronderstellen we Ω steeds polygonaal, zodat Ω in driehoekjes verdeeld kan worden.

- (iii) Een partitie van Ω moet aan zekere voorwaarden voldoen. Zo mogen twee driehoekjes óf één zijde óf één hoekpunt óf niets gemeen hebben. Verder moet in ieder driehoekje de verhouding tussen de grootste zijde en de straal van de grootste ingeschreven cirkel aan zekere regulariteitseisen voldoen. We komen daar in §3.10 op terug.
- (iv) Voor de opbouw van een eindige elementenruimte V_h gebruiken we stuksgewijze polynomen als basisfuncties. De basis van V_h kan evenwel ook *onvolledig* zijn: hoewel de basisfuncties polynomen van de graad t zijn, behoort niet elk polynoom van de graad $\leq t$ tot V_h .

Voorbeeld Zij V_h opgespannen door stuksgewijze polynomen van de vorm

$$(a_0 + \dots + a_k x^k)(b_0 + \dots + b_k y^k), \quad a_k b_k \neq 0.$$

Dan zijn de basisfuncties polynomen van de graad $2k$, maar de ruimte V_h bevat niet alle polynomen van de graad t ($k+1 \leq t \leq 2k$). Deze zgn. *bikomplete* ruimten worden gebruikt bij partities in vierhoeken. We zullen ons in dit hoofdstuk beperken tot eerste orde zelfgeadjungeerde, positief definitie variatieproblemen, d.w.z. problemen van de vorm:

Minimaliseer

$$I(v) = \iint_{\Omega} [(\bar{\nabla} v \cdot P \bar{\nabla} v) + q(x,y)v^2 - 2f(x,y)v] dx dy,$$

onder de randvoorwaarden

$$v = 0 \quad \text{op } \partial\Omega,$$

waarbij $P = P(x,y)$ een 2×2 symmetrische, positief definitie matrix is en $q \geq 0$. We zullen aandacht besteden aan stuksgewijs Lagrange- en Hermite-interpolaties, aan de assemblage van de globale stijfheidsmatrix, massamatrix en belastingsvektor en aan de isoparametrische elementen. Tot slot leiden we beknopt een schatting af van de globale fout.

3.10. Lagrange-interpolatie in twee dimensies

Laat $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ een begreind polygonaal gebied zijn. We verdelen Ω in M driehoekjes e_ℓ en geven deze verdeling aan met

$$(3.10.1) \quad \pi = \{e_\ell\}_{\ell=1}^M, \quad \bigcup_{\ell=1}^M e_\ell = \Omega.$$

We definiëren voor $\ell = 1, \dots, M$

$$(3.10.2) \quad \begin{aligned} h_\ell &= \text{diameter}(e_\ell); \\ \rho_\ell &= \text{straal van de grootste in } e_\ell \text{ geschreven cirkel}; \\ h &= \max h_\ell, \text{ de maaswijdte van } \pi. \end{aligned}$$

Deze partitie π moet aan zekere eisen van regulariteit voldoen.

Definitie 3.10.1 Een familie van partities π met maaswijdte h van Ω heet regulier, als er een konstante $C > 0$ onafhankelijk van M en h is met

$$(3.10.3) \quad \rho_\ell \geq C h_\ell, \quad \ell = 1, \dots, M.$$

Volgens ZLAMÄL [1970] is deze definitie ekwivalent met de eigenschap dat er een konstante ϕ_0 bestaat, $0 < \phi_0 \leq \frac{\pi}{3}$, ϕ_0 onafhankelijk van M en h , met de eigenschap

$$\phi_0 \leq \alpha_\ell, \beta_\ell, \gamma_\ell, \quad \ell = 1, \dots, M,$$

waarbij α_ℓ, β_ℓ en γ_ℓ de hoeken van e_ℓ zijn.

Definitie 3.10.2 Zij $\pi = \{e_\ell\}_{\ell=1}^M$ een reguliere partitie van Ω . Dan wordt $\mathbb{P}_k(\pi)$ gedefinieerd als de ruimte van functies die

- (i) continu zijn op $\bar{\Omega}$;
- (ii) op ieder driehoekje e_ℓ ($\ell = 1, \dots, M$) een polynoom in x en y van de graad $\leq k$ zijn.

Het is duidelijk dat $\mathbb{P}_k(\pi)$ een eindigdimensionale deelruimte is van

$$H^1(\Omega) = \{v \mid v, v_x, v_y \in L^2(\Omega)\}.$$

We geven de basisfuncties van $\mathbb{P}_k(\pi)$ voor $k = 1, 2, 3$.

$$\underline{k = 1}$$

Een element van $\mathbb{P}(\pi)$ is een stuksgewijs lineaire funktie in x en y en is geheel bepaald door de waarden die het in de hoekpunten van de driehoekjes aanneemt. Deze N hoekpunten kiezen we als steunpunten voor een basis van $\mathbb{P}_1(\pi)$. De steunpunten geven we aan met

$$z_i = (x_i, y_i)^T, \quad i = 1, \dots, N.$$

De basisfuncties $\phi_i(x, y)$ kiezen we nu lineair op elke e_ℓ en wel zo, dat

$$(3.10.4) \quad \phi_i(z_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq N.$$

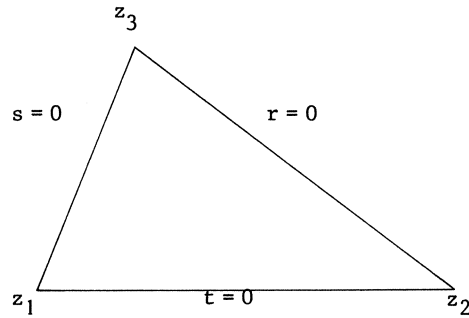
Kennelijk is $\phi_i(x, y)$ alleen $\neq 0$ op die driehoeken e_ℓ ($\ell = 1, \dots, M$) waartoe z_i behoort. Hieruit volgt dat op iedere driehoek e_ℓ met hoekpunten z_1, z_2 en z_3 (we gebruiken lokale nummering) slechts *drie* basisfuncties $\neq 0$ zijn. Het is natuurlijk mogelijk om ϕ_1, ϕ_2 en ϕ_3 rechtstreeks in x en y uit te drukken. Het is evenwel handiger met *barycentrische* of *zwaartepuntskoördinaten* te werken. Hiertoe nemen we drie parameters r, s en t met $r+s+t = 1$. Door middel van de transformatie

$$(3.10.5) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$$

wordt het gebied

$$T: \quad \begin{aligned} 0 &\leq r, s, t \leq 1; \\ 1 &= r + s + t, \end{aligned}$$

één-eenduidig in het driehoekje e_ℓ overgevoerd. We merken op dat de punten $w_1 = (1, 0, 0)^T$, $w_2 = (0, 1, 0)^T$ en $w_3 = (0, 0, 1)^T$ overeenkomen met de hoekpunten van e_ℓ en dat de vergelijkingen $r=0$, $s=0$ of $t=0$ de driehoeks zijden weergeven (zie figuur 3.7).



Figuur 3.7

Voor de meetkundige betekenis van zwaartepuntskoördinaten zie BELL [1969].

We moeten nu drie functies vinden, lineair in r , s en t en aan te geven met $\phi_i(r,s,t)$ die voldoen aan

$$\phi_i(w_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq 3.$$

Deze functies zijn:

$$\begin{aligned} \phi_1(r,s,t) &= r; \\ (3.10.6) \quad \phi_2(r,s,t) &= s; \\ \phi_3(r,s,t) &= t. \end{aligned}$$

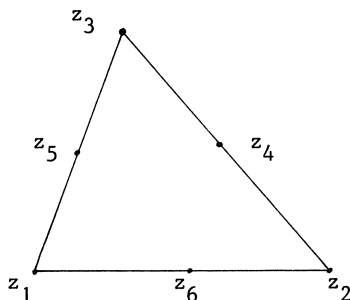
Omdat een lineaire transformatie polynomen in polynomen vervoert, geldt:

$$\begin{aligned} \phi_1(x,y) &= r; \\ (3.10.6a) \quad \phi_2(x,y) &= s; \\ \phi_3(x,y) &= t. \end{aligned}$$

$$\underline{k = 2}$$

Een volledig polynoom van de tweede graad in twee variabelen heeft zes vrijheidsgraden, zodat op ieder driehoekige e_ℓ een element uit $\mathbb{P}_2(\pi)$ volledig bepaald is door de waarden die het in zes punten van e_ℓ aanneemt.

We kiezen daarvoor de hoekpunten en de middens van de driehoekszijden.



Figuur 3.8

De lezer ga zelf na dat de continuïteit van een element uit $\mathbb{P}_2(\pi)$ op de hoekpunten en de middens der driehoekszijden continuïteit op het gehele gebied impliceert.

Een element in $\mathbb{P}_2(\pi)$ is nu volledig bepaald door de waarden die het in de hoekpunten en op de middens der zijden aanneemt. We kiezen dus de N steunpunten z_i van de basisfuncties in de hoekpunten en op de middens der zijden. De basisfuncties $\phi_i(x,y)$ ($i = 1, \dots, N$) worden gedefinieerd als functies die tweedegraadspolynomen op ieder driehoekje e_ℓ zijn en die voldoen aan de betrekkingen

$$\phi_i(z_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

We bekijken nu een driehoekje e_ℓ met hoekpunten z_1, z_2 en z_3 en middens z_4, z_5 en z_6 . Op dit driehoekje zijn alleen de basisfuncties $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5$ en $\phi_6 \neq 0$. Om deze basisfuncties te bepalen maken we gebruik van zwaartepuntscoördinaten r, s en t . Geven we de hoekpunten en middens der zijden in het driehoekje

$$\begin{aligned} & 0 \leq r, s, t \leq 1; \\ \text{T:} \quad & 1 = r + s + t, \end{aligned}$$

aan met $w_1 = (1, 0, 0)^T$, $w_2 = (0, 1, 0)^T$, $w_3 = (0, 0, 1)^T$, $w_4 = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$, $w_5 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})^T$ en $w_6 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)^T$, dan moeten we tweedegraadpolynomen ϕ_i in r, s en t vinden, die voldoen aan:

$$\phi_i(w_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq 6.$$

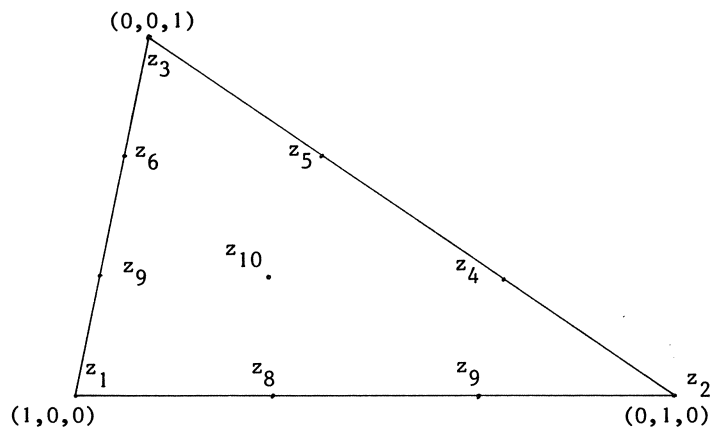
Deze polynomen zijn (zie MITCHELL [1973]):

$$\begin{aligned}
 \phi_1(r,s,t) &= r(2r-1) ; \\
 \phi_2(r,s,t) &= s(2s-1) ; \\
 \phi_3(r,s,t) &= t(2t-1) ; \\
 (3.10.7) \quad \phi_4(r,s,t) &= 4st ; \\
 \phi_5(r,s,t) &= 4rt ; \\
 \phi_6(r,s,t) &= 4st ,
 \end{aligned}$$

waarmee lokaal op e_ℓ de basis van $\mathbb{P}_2(\pi)$ is bepaald.

$$\underline{k = 3}$$

We kiezen de steunpunten in de hoekpunten van de driehoekjes en verder twee op elke driehoekszijde, bij voorkeur zodanig, dat iedere driehoekszijde in drie gelijke stukken wordt verdeeld. In ieder driehoekje moet nog een inwendig steunpunt worden gekozen. We kunnen daarvoor het zwaartepunt kiezen.



Figuur 3.9

We kunnen de basisfuncties het beste in de zwaartepuntskoördinaten r , s en t uitdrukken. We moeten dan derdegraadspolynomen $\phi_i(r,s,t)$ vinden met

$$\phi_i(z_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq 10.$$

Deze polynomen zijn (zie MITCHELL [1973]):

$$\begin{aligned} \phi_1(r,s,t) &= \frac{1}{2}r(3r-1)(3r-2) ; \\ \phi_2(r,s,t) &= \frac{1}{2}s(3r-1)(3s-2) ; \\ \phi_3(r,s,t) &= \frac{1}{2}t(3t-1)(3t-2) ; \\ \phi_4(r,s,t) &= \frac{9}{2}st(3s-1) ; \\ \phi_5(r,s,t) &= \frac{9}{2}st(3t-1) ; \\ \phi_6(r,s,t) &= \frac{9}{2}rt(3t-1) ; \\ \phi_7(r,s,t) &= \frac{9}{2}rt(3r-1) ; \\ \phi_8(r,s,t) &= \frac{9}{2}rs(3r-1) ; \\ \phi_9(r,s,t) &= \frac{9}{2}rs(3s-1) ; \\ \phi_{10}(r,s,t) &= 27rst , \end{aligned} \quad (3.10.9)$$

waarmee $\phi_i(x,y)$ lokaal bepaald is. Voor een verdere beschrijving zie MITCHELL [1973].

3.11. Hermite-interpolatie in twee dimensies

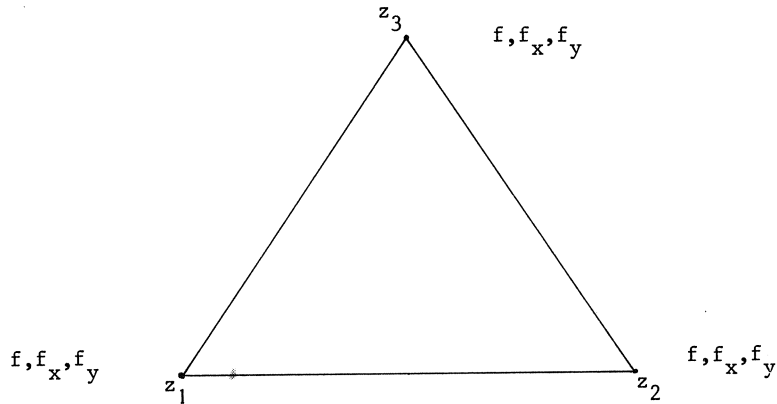
We bespreken in deze sectie een deelruimte van $H^1(\Omega)$ die iets specialer is dan de $\mathbb{P}_k(\pi)$ uit de vorige sectie.

Laat $\pi = \{e_1, \dots, e_M\}$ een reguliere partitie van Ω in driehoekjes zijn met maaswijdte h .

Definitie 3.11.1 Onder $\mathbb{H}_k(\pi)$ verstaan we de ruimte van functies f die

- (i) tot $\mathbb{P}_k(\pi)$ behoren;
- (ii) in alle hoekpunten z_i van de driehoekjes continue partiële afgeleiden f_x en f_y hebben.

We gaan nu na hoe groot k moet zijn. Daartoe beschouwen we een driehoekje e_ℓ . We geven de hoekpunten aan met z_1 , z_2 en z_3 .



Figuur 3.10

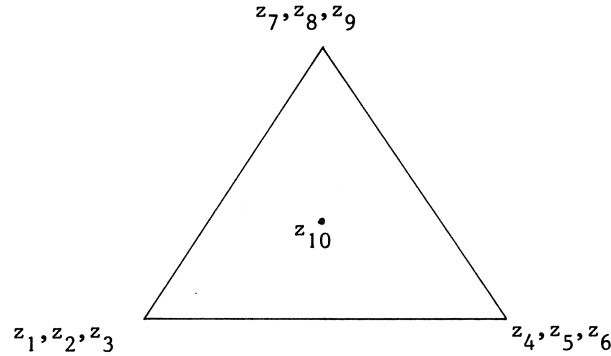
Ieder hoekpunt levert drie kondities op (kontinuïteit van f , f_x en f_y), zodat per driehoek aan *negen* kondities moet worden voldaan. Hieruit volgt dat $k \geq 3$.

We behandelen hier uitsluitend $k=3$. Aangezien een derdegraadspolynoom in twee variabelen *tien* vrijheidsgraden heeft, moeten we op het driehoekje e_ℓ nog een *inwendig* steunpunt kiezen en nemen daarvoor het zwaartepunt z_c . De steunpunten van de basisfuncties van $\mathbb{H}_3(\pi)$ zijn nu de hoekpunten (drievoudig) en de zwaartepunten (enkelvoudig). Een element uit $\mathbb{H}_3(\pi)$ is nu volledig bepaald door (i) de funktiewaarden en partiële afgeleiden in de hoekpunten en (ii) de funktiewaarden in de zwaartepunten. Om de basisfuncties van $\mathbb{H}_3(\pi)$ te definiëren voeren we het begrip *knooppunt* in.

Definitie 3.11.2. Onder een knooppunt verstaan we het koppel (D^α, z_i) , waarbij $D^\alpha = (\frac{\partial}{\partial x})^{\alpha_1} (\frac{\partial}{\partial y})^{\alpha_2}$ een differentiaaloperator van de orde $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$ is en z_i een steunpunt. D^α kan de identiteit, $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ etc. zijn.

In ieder *hoekpunt* z_i van de partitie π zijn dus drie knooppunten gedefinieerd: (I, z_i) , $(\partial/\partial x, z_i)$ en $(\partial/\partial y, z_i)$; in ieder *zwaartepunt* z_c is slechts het knooppunt (I, z_c) gedefinieerd.

We gaan nu de steunpunten opnieuw nummeren, waarbij de multipliciteit wordt meegerekend; de steunpunten op een driehoekje worden nu (lokaal) genummerd: z_1, \dots, z_{10} .



Figuur 3.11

We gaan vervolgens de knooppunten nummeren: $(D_1, z_1), (D_2, z_2), \dots, (D_N, z_N)$, waarbij D_i een operator is die de identiteit $\partial/\partial x$ of $\partial/\partial y$ kan zijn. In figuur 3.11 wordt dus als volgt (lokaal) genummerd: $(D_1, z_1), (D_2, z_2), \dots, (D_{10}, z_{10})$ met $D_1 = D_4 = D_7 = D_{10} = I$, $D_2 = D_5 = D_8 = \partial/\partial x$, $D_3 = D_6 = D_9 = \partial/\partial y$.

Na deze definitie van knooppunten kunnen we de basisfuncties $\phi_i(x, y)$ definiëren door de relaties

$$D_j \phi_i(z_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq N.$$

We gaan nu per driehoek een formule voor ϕ_i geven.

Op ieder driehoekje e_ℓ zijn slechts tien basisfuncties $\neq 0$. We geven deze basisfuncties weer m.b.v. zwaartepuntscoördinaten r, s en t . Als (x_1, y_1) , (x_2, y_2) en (x_3, y_3) de hoekpunten van e_ℓ zijn, dan definiëren we

$$\begin{aligned} x_{ij} &= x_i - x_j, \\ y_{ij} &= y_i - y_j, \end{aligned} \quad i, j = 1, 2, 3.$$

De formules van de basisfuncties zijn nu (zie FELIPPA [1970] en MITCHELL [1973]):

$$\begin{aligned} \phi_1(r, s, t) &= r^2(3-2r) - 7rst && ; \\ \phi_2(r, s, t) &= r^2(x_{21}s - x_{13}t) + (x_{13} - x_{21})rst; \\ \phi_3(r, s, t) &= r^2(y_{21}s - y_{13}t) + (y_{13} - y_{21})rst; \\ \phi_4(r, s, t) &= s^2(3-2s) - 7rst && ; \end{aligned} \quad (3.11.1)$$

$$\phi_5(r,s,t) = s^2(x_{32}t - x_{21}r) + (x_{21} - x_{32})rst;$$

$$\phi_6(r,s,t) = s^2(y_{32}t - y_{21}r) + (y_{21} - y_{32})rst;$$

$$\phi_7(r,s,t) = t^2(3-2t) - 7rst \quad ;$$

$$\phi_8(r,s,t) = t^2(x_{13}r - x_{32}s) + (x_{32} - x_{13})rst;$$

$$\phi_9(r,s,t) = t^2(y_{13}r - y_{32}s) + (y_{32} - y_{13})rst;$$

$$\phi_{10}(r,s,t) = 27rst.$$

3.12. Een variatieprobleem

Gegeven het probleem: Minimaliseer

$$I(v) = \iint_{\Omega} [p_1 v_x^2 + p_2 v_y^2 + qv^2 - 2fv] dx dy,$$

(3.12.1)

$$v = 0 \quad \text{op} \quad \partial\Omega,$$

waarbij $p_1, p_2 \in C^1(\bar{\Omega})$, $f, q \in C^0(\bar{\Omega})$, $p_1, p_2 \geq p_{\min} > 0$, $q \geq 0$. De oplossing u van (3.12.1) ligt in

$$H_L = \{v \mid v \in H^1(\Omega); v = 0, (x,y)^T \in \partial\Omega\}.$$

In H_L zijn energieinprodukt en energienorm gedefinieerd door

$$(u,v)_L = \iint_{\Omega} [p_1 u_x v_x + p_2 u_y v_y + quv] dx dy;$$

(3.12.1)

$$\|u\|_L = \sqrt{(u,u)_L}.$$

Zij $\pi = \{e_1, \dots, e_M\}$ een reguliere partitie van Ω . We definiëren $\mathbb{P}_k(\Omega)$ als in §3.10 met N steunpunten z_i en basisfuncties $\phi_i(x,y)$. We benaderen nu (3.12.1) door het probleem:

Minimaliseer

$$I(v_h), \quad v_h \in \mathbb{P}_k(\pi);$$

(3.12.3)

$$v_h = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega.$$

Aangezien $\partial\Omega$ stuksgewijs recht is, is het voldoende de randvoorwaarde te vervangen door

$$v_h(z_i) = 0, \quad z_i \in \partial\Omega.$$

We stellen nu $N = N_I + N_B$, waarbij N_B het aantal steunpunten is dat tot $\partial\Omega$ behoort en N_I het aantal *inwendige* steunpunten. We nummeren de inwendige steunpunten met z_1, \dots, z_{N_I} en de randsteunpunten met z_{N_I+k}, \dots, z_N . Schrijven we voor een element $v_h \in \mathbb{P}_k(\pi)$

$$v_h(x, y) = \sum_{i=1}^N q_i \phi_i(x, y),$$

dan gaat (3.12.3) over in:

Minimaliseer

$$F(q_1, \dots, q_N) \equiv I(v_h);$$

$$q_i = 0, \quad i = N_I + 1, \dots, N.$$

De oplossing hiervan wordt gegeven door het stelsel

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N_I;$$

(3.12.4)

$$q_i = 0, \quad i > N_I.$$

De oplossing u_h van (3.12.3) wordt nu gerepresenteerd door

$$u_h(x, y) = \sum_{i=1}^{N_I} a_i \phi_i(x, y),$$

waarbij (a_1, \dots, a_{N_I}) de oplossing is van het stelsel

$$(3.12.5) \quad \sum_{j=1}^{N_I} (\phi_i, \phi_j)_L a_j = \iint_{\Omega} f \phi_i \, dx dy, \quad i = 1, \dots, N_I.$$

We moeten dus de matrix $((\phi_i, \phi_j)_L)$ berekenen met

$$(3.12.6) \quad \begin{aligned} (\phi_i, \phi_j)_L &= s_{ij} + m_{ij}; \\ s_{ij} &= \iint_{\Omega} [p_1 \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + p_2 \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y}] dx dy; \\ m_{ij} &= \iint_{\Omega} q \phi_i \phi_j \, dx dy, \quad 1 \leq i, j \leq N_I. \end{aligned}$$

Ook moeten we de vektor b berekenen met

$$b_i = \iint_{\Omega} f \phi_i \, dx dy, \quad i = 1, \dots, N_I.$$

We berekenen $A = ((\phi_i, \phi_j)_L)$ en b als volgt:

(i) We berekenen de $N \times N$ matrix

$$\begin{aligned} A^* &= \sum_{\ell=1}^M A^{(\ell)} = \sum_{\ell=1}^M (S^{(\ell)} + M^{(\ell)}) \quad ; \\ S^{(\ell)} &= \left(\iint_{\Omega} [p_1 \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + p_2 \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y}] dx dy \right)_{e_{\ell}}; \\ M^{(\ell)} &= \left(\iint_{\Omega} q \phi_i \phi_j \, dx dy \right)_{e_{\ell}}. \end{aligned}$$

(ii) We berekenen de vektor

$$\begin{aligned} b^* &= \sum_{\ell=1}^M b^{(\ell)} \quad ; \\ b^{(\ell)} &= \left(\iint_{\Omega} f \phi_i \, dx dy \right)_{e_{\ell}}. \end{aligned}$$

(iii) Vervolgens konstrueren we A uit A^* en b uit b^* door de componenten met index groter dan N_I te schrappen:

$$A^* = \begin{bmatrix} \overleftarrow{N_I} \rightarrow & \overleftarrow{N_B} \rightarrow \\ A_I & A_{BI} \\ A_{BI}^T & A_B \end{bmatrix} \longrightarrow A_I \equiv A ;$$

$$b^* = \begin{bmatrix} b_I \\ b_B \end{bmatrix} \begin{array}{c} \uparrow N_I \\ \downarrow \\ \uparrow N_B \\ \downarrow \end{array} \longrightarrow b_I \equiv b .$$

In het geval van *inhomogene* coördinaten treedt een kleine modifikatie op:

$$A^* \rightarrow A_I \equiv A ;$$

$$b^* \rightarrow b_I - A_{BI} b_B \equiv b .$$

$S^{(\ell)}$, $M^{(\ell)}$ en $b^{(\ell)}$ moeten veelal met behulp van numerieke kwadratuur worden geëvalueerd. Een voorbeeld daarvan is de Newton-Cotes-kwadratuur.

Zij

$$w_i^{(\ell)} = \iint_{e_\ell} \phi_i(x,y) dx dy,$$

dan kunnen we voor $S^{(\ell)}$, $M^{(\ell)}$ en $b^{(\ell)}$ de volgende benaderingen gebruiken:

$$\begin{aligned}
 s_{ij}^{(\ell)} &\simeq \sum_m w_m^{(\ell)} \left[p_1 \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + p_2 \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right] (x_m, y_m); \\
 (3.12.7) \quad m_{ij}^{(\ell)} &\simeq \sum_m w_m^{(\ell)} [q \phi_i \phi_j] (x_m, y_m) = w_i^{(\ell)} q(x_i, y_i) \delta_{ij}; \\
 b_i^{(\ell)} &\simeq \sum_m w_m^{(\ell)} [f \phi_i] (x_m, y_m) = w_i^{(\ell)} f(x_i, y_i).
 \end{aligned}$$

De gewichten $w_i^{(\ell)}$ worden gegeven door de formule

$$(3.12.8) \quad w_i^{(\ell)} = 2\mu(e_\ell) \iiint_T \phi_i(r, s, t) \, dr \, ds \, dt,$$

waarbij $\phi_i(r, s, t)$ de barycentrische representatie van $\phi_i(s, y)$ is en $\mu(e_\ell)$ de oppervlakte van e_ℓ . Formule (3.12.8) kan verder uitgewerkt worden met behulp van de formule

$$(3.12.9) \quad \iiint_T r^m s^n t^p \, dr \, ds \, dt = \frac{m!n!p!}{(m+n+p+r)!}.$$

Zie verder STRANG & FIX [1973] voor een analyse van het effect van de kwadratuurfout en BELL [1969] voor de berekening van (3.12.9).

3.13. Isoparametrische elementen

In de vorige secties was Ω steeds een polygonaal gebied, zodat Ω precies in driehoeken kon worden opgesplitst. Indien Ω een *kromme* rand heeft, kunnen we gebruik maken van driehoeken met kromme randen, de zgn. *isoparametrische elementen*.

Om dit begrip te kunnen definiëren voeren we eerst het begrip *unisolvante verzameling* in. We veronderstellen in deze paragraaf steeds dat $N_k = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$.

Definitie 3.13.1 Zij $v = \{z_1, \dots, z_{N_k}\}$ een verzameling van N_k verschillende punten in \mathbb{R}^2 . Dan heet v een *k-unisolvante verzameling*, als er bij iedere verzameling $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{N_k}\}$ van N_k reële getallen precies één polynoom $P_k(x, y)$ van de graad k in x en y bestaat, met

$$P_k(z_i) = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, N_k.$$

Voorbeelden van dergelijke verzamelingen zijn:

- (i) $k=1$; de hoekpunten van een driehoek;
- (ii) $k=2$; de hoekpunten van een driehoek en de middens der zijden;
- (iii) $k=3$; de hoekpunten van een driehoek, twee verschillende punten op iedere zijde en één inwendig punt.

We gaan nu een *isoparametrisch element van de tweede graad* definiëren.

Definitie 3.13.2 Zij $v = \{z_1, z_2, \dots, z_6\}$ een 2-unisolvente verzameling in \mathbb{R}^2 . Laten de polynomen $\phi_1(r, s, t), \dots, \phi_6(r, s, t)$ zijn gedefinieerd door (3.10.7). Dan heet de verzameling punten $(x, y)^T$ gegeven door

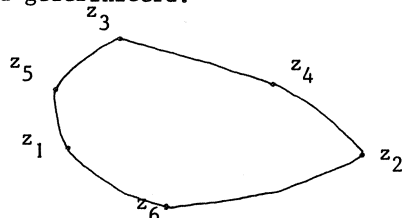
$$(x, y)^T = \sum_{i=1}^6 z_i \phi_i(r, s, t);$$

$$(3.13.1) \quad 0 \leq r, s, t \leq 1;$$

$$1 = r + s + t,$$

een isoparametrisch element van de tweede graad (zie figuur 3.12).

Op analoge manier worden isoparametrische elementen van de eerste en derde graad gedefinieerd.



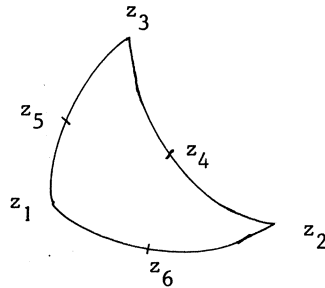
Figuur 3.12

We zien dat iedere k -unisolvente puntenverzameling een isoparametrisch element van de k^e graad ondubbelzinnig definiëert. Het is verder evident dat iedere driehoek met hoekpunten z_1, z_2 en z_3 een isoparametrisch element van de eerste graad is, dat iedere driehoek met hoekpunten z_1, z_2 en z_3 en met zijdemiddens z_4, z_5 en z_6 een isoparametrisch element van de 2^e graad is, etc. We noemen deze elementen, die we reeds in de vorige paragraaf behandelden *rechte isoparametrische elementen*.

We geven nu een voorbeeld van een *krom* isoparametrisch element van de tweede graad. We nemen drie punten z_1, z_2 en z_3 die tezamen een driehoek opspannen. Vervolgens kiezen we z_4, z_5 en z_6 zo, dat

- (i) z_4, z_5 en z_6 *niet alle* op de driehoekszijden liggen;

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad & \|z_4 - \frac{1}{2}(z_2 + z_3)\| \ll \|z_2 - z_3\| ; \\
 & \|z_5 - \frac{1}{2}(z_1 + z_3)\| \ll \|z_1 - z_3\| ; \\
 & \|z_6 - \frac{1}{2}(z_1 + z_2)\| \ll \|z_1 - z_2\| .
 \end{aligned}$$



Figuur 3.13

Het kan bewezen worden dat in dat geval $\{z_1, \dots, z_6\}$ een 2-unisolvente verzameling is. Voor meer voorbeelden van kromme isoparametrische elementen, zie CIARLET & RAVIART [1972a].

Benadering van Ω d.m.v. isoparametrische elementen

Zij Ω een konvex gebied met een (stuksgewijs) kromme rand in \mathbb{R}^2 . Indien we probleem (3.12.1) door middel van de eindige elementenmethode willen oplossen, kunnen we dit doen door Ω door een polygonaal gebied Ω_h te benaderen en vervolgens het probleem (3.12.1) te benaderen door:

Minimaliseer

$$I_h(v) = \iint_{\Omega_h} [p_1 \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + p_2 \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + qv^2 - 2fv] dx dy;$$

(3.13.2)

$$v = 0 \quad \text{op} \quad \partial\Omega_h.$$

Vervolgens benaderen we (3.13.2) door:

Minimaliseer

$$I_h(v_h), \quad v_h \in \mathbb{P}_k(\pi);$$

(3.13.3)

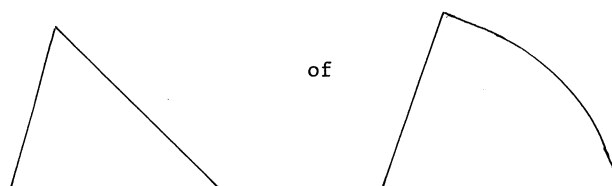
$$v_h = 0 \quad \text{op} \quad \partial\Omega_h.$$

Deze aanpak evenwel werkt alleen goed voor $k = 1$, omdat voor $k > 1$ de orde van nauwkeurigheid van de benadering van (3.12.1) te sterk wordt beïnvloed door de onnauwkeurigheid waarmee Ω wordt benaderd door Ω_h . We moeten in dat geval Ω benaderen door een gebied Ω_h dat is opgebouwd uit isoparametrische elementen van de graad k . We illustreren dit voor $k = 2$.

We voeren de benadering in twee stappen uit:

- (i) We splitsen Ω op in M "driehoekjes" \tilde{e}_ℓ , waarbij elk driehoekje \tilde{e}_ℓ twee of drie rechte zijden heeft.

Aangezien \tilde{e}_ℓ zelf eveneens konvex is, ziet \tilde{e}_ℓ er altijd zo uit:



We nemen aan dat de partitie regulier is, i.e. dat er een $c > 0$, onafhankelijk van de partitie, bestaat met

$$\tilde{h}_\ell = \text{diameter}(\tilde{e}_\ell) \leq h;$$

$$\tilde{\rho}_\ell = \sup (\text{straal ingeschr. cirkels in } \tilde{e}_\ell) \geq Ch_\ell.$$

- (ii) We konstrueren nu Ω_h door iedere \tilde{e}_ℓ te benaderen door een isoparametrisch element e_ℓ van de tweede graad en te definiëren

$$\Omega_h = \bigcup_{\ell=1}^M e_\ell.$$

Deze approximatie gaat als volgt: We kiezen in iedere \tilde{e}_ℓ de hoekpunten en de middens der zijden als een 2-unisolvente verzameling en passen formule (3.13.3) toe.

Het is evident dat driehoeken met drie rechte zijden invariant blijven, terwijl driehoeken met één bolle rand konvex blijven. Evenwel hoeft Ω_h niet meer konvex te zijn voor $k > 1$.

Het variatieprobleem

We keren terug naar (3.12.1) en proberen dit minimaliseringsprobleem aan te pakken door de ruimte $H^1(\Omega_h)$ op een speciale manier te benaderen. We nemen aan dat Ω_h is opgebouwd uit isoparametrische elementen van de tweede graad en dat de partitie regulier is. We definiëren de ruimte $V_h \subset H^2(\Omega_h)$ door de basisfuncties op ieder element e_ℓ te definiëren. Zij gegeven het element e_ℓ . Laten z_1, z_2 en z_3 de hoekpunten zijn en z_3, z_4 en z_5 de middens der zijden (lokale nummering). Dan wordt op e_ℓ $\phi_i(x,y)$ als volgt gedefinieerd:

$$\begin{aligned}
 \phi_i(x,y) &= \phi_i(r,s,t), & i &= 1, \dots, 6; \\
 (x,y)^T &= \sum_{i=1}^6 z_i \phi_i(r,s,t) & ; \\
 (3.13.5) \quad & & & \\
 l &= r + s + t & ; \\
 0 &\leq r, s, t \leq 1 & ,
 \end{aligned}$$

waarbij $\phi_i(r,s,t)$ is gegeven door (3.10.7). Kennelijk voldoen de basisfuncties eveneens aan de betrekking

$$\phi_i(z_j) = \delta_{ij}.$$

Door bovenstaande *elementsgewijze* definitie van de basisfuncties is de ruimte V_h precies vastgelegd. Aangezien de basisfuncties continu zijn op de randen van de "driehoeken" (de gemeenschappelijke randen van de driehoeken zijn altijd recht, waardoor de basisfuncties cih op die randen als tweedegraadspolynomen gedragen), is V_h een deelruimte van $H^1(\Omega_h)$. We benaderen nu (3.13.4) door:

Minimaliseer

$$\begin{aligned}
 I_h(v_h), \quad v_h &\in V_h; \\
 v_h &= 0 \quad \text{op} \quad \partial\Omega_h.
 \end{aligned}$$

De aanpak van (3.12.1) gaat nu verder als in §3.12. Voor een analyse van het effect van de vervanging van Ω door Ω_h , zie CIARLET & RAVIART [1972a].

3.14. Foutschatting

We gaan in deze paragraaf een schatting afleiden van de fout die optreedt als we een $2m^e$ orde zelfgeadjungeerd Dirichlet-randwaardeprobleem oplossen door middel van de eindige elementenmethode.

Zij $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ een begreind konvex gebied met een stuksgewijs rechte rand $\partial\Omega$.

Zij $L: H^{2m}(\Omega) \rightarrow H^0(\Omega)$ een lineaire operator gedefinieerd door

$$(3.14.1) \quad Lu = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (p_\alpha(x) D^\alpha u),$$

waarbij $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ een multiindex is met $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $|\alpha| \leq m$ en waarbij D^α een differentiaaloperator van de orde $|\alpha|$ is.

We definiëren de ruimte $H_0^m(\Omega)$ als volgt:

$$H_0^m(\Omega) = \{v \mid v \in H^m(\Omega), v = \frac{\partial v}{\partial n} = \dots = \frac{\partial^m v}{\partial n^m} = 0 \text{ op } \partial\Omega\}.$$

L is dan zelfgeadjungeerd op $H_0^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} (Lu, v) &= \int_{\Omega} Luv \, dx_1 \dots dx_n = \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} p_\alpha(x) D^\alpha u D^\alpha v \, dx_1 \dots dx_n = (Lv, u), \\ &u, v \in H_0^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega). \end{aligned}$$

We definiëren nu de bilineaire symmetrische operator $B: H_0^m(\Omega) \times H_0^m(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ als volgt:

$$(3.14.2) \quad B(u, v) = (Lu, v) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} p_\alpha(x) D^\alpha u D^\alpha v \, dx.$$

We veronderstellen dat B sterk koërcief is:

$$\begin{aligned} |B(u, v)| &\leq C \|u\|_m \|v\|_m, \quad u, v \in H_0^m(\Omega); \\ (3.14.3) \quad C_1 \|u\|_m^2 &\leq B(u, u) \leq C_2 \|u\|_m^2. \end{aligned}$$

We weten dat in dat geval het randwaardeprobleem

$$(3.14.4) \quad \begin{aligned} Lu &= f, & f &\in H^0(\Omega); \\ u &\in H_0^m(\Omega) \end{aligned}$$

precies één oplossing u heeft. Deze u heeft de eigenschap dat hij de functionaal

$$(3.14.5) \quad I(v) = B(v, v) - 2(f, v)$$

minimaliseert over $H_0^m(\Omega)$ en aan de zwakke Galerkin-vorm

$$(3.14.6) \quad B(u, v) = (f, v), \quad v \in H_0^m(\Omega)$$

voldoet. We zoeken nu een approximatie van u door $I(v)$ over een geschikte deelruimte van $H_0^m(\Omega)$ te minimaliseren.

Zij $\pi = \{e_\ell\}_{\ell=1}^M$ een reguliere partitie van Ω in simplexen. Bij een vast natuurlijk getal $k \geq 2m-1$ definiëren we V_h als de ruimte van functies die

- (i) tot $H_0^m(\Omega)$ behoren;
- (ii) op ieder simplex e_ℓ een polynoom van de graad kleiner dan $k+1$ zijn.

Volgens CIARLET & RAVIART [1972b] bestaat er dan een konstante C onafhankelijk van $h = \max_\ell (\text{diameter}(e_\ell))$ zodat voor iedere $v \in H^q(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$ de volgende ongelijkheid geldt:

$$(3.14.7) \quad \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_s \leq Ch^{d-s} \|v\|_d, \quad \begin{aligned} s &= 0, \dots, m; \\ d &= \min(k+1, q), \quad q \geq m. \end{aligned}$$

We benaderen nu de oplossing van (3.14.4) c.q. (3.14.6) door $I(v)$ over V_h te minimaliseren. De unieke functie $u_h \in V_h$ die $I(v)$ minimaliseert over V_h voldoet aan de volgende eigenschappen (zie STRANG & FIX [1973]):

$$(3.14.8) \quad \begin{aligned} B(u_h, v_h) &= (f, v_h), \\ B(u - u_h, v_h) &= 0, \\ B(u - u_h, u - u_h) &\leq B(u - v_h, u - v_h), \quad v_h \in V_h. \end{aligned}$$

Om nu een schatting te maken van de fout $\|u - u_h\|_s$ ($s = 0, \dots, m$), introduceren we het volgende *hulpprobleem* (Nitsche's truuk):

Zij $w \in H^{2m-s}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$ de oplossing van de zwakke Galerkin-vorm

$$(3.14.9) \quad B(w, v) = (g, v), \quad v \in H_0^m(\Omega),$$

waarbij $g \in H^{-s}(\Omega)$ een begrensde lineaire funktionaal op $H^s(\Omega)$ is ($s = 0, \dots, m$). Nemen we $v = e_h = u - u_h$, dan krijgen we na toepassing van (3.14.8) wegens de symmetrie van B

$$(3.14.10) \quad B(w - v_h, e_h) = (g, e_h), \quad v_h \in V_h.$$

Wegens (3.14.3) krijgen we dan

$$(3.14.11) \quad |(g, e_h)| \leq C \|w - v_h\|_m \|e_h\|_m, \quad v_h \in V_h.$$

We moeten dus bovengrenzen afleiden van $\|e_h\|_m$ en $\inf_{v_h} \|w - v_h\|_m$.

Uit (3.14.7) volgt dat

$$\inf_{v_h \in V_h} \|w - v_h\|_m \leq Ch^{d-m} \|w\|_d;$$

$$d = \min(k+1, 2m-s).$$

Aangezien $k+1 \geq 2m$, volgt daaruit dat $d = 2m-s$, waaruit volgt dat

$$(3.14.12) \quad \inf_{v_h} \|w - v_h\|_m \leq Ch^{m-s} \|w\|_{2m-s}.$$

Voor $\|e_h\|_m$ geldt wegens (3.14.3) en (3.14.8), aangezien $u \in H^{k+1}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$,

$$\|e_h\|_m^2 \leq C B(e_h, e_h) \leq C B(u - v_h, u - v_h) \leq C' \|u - v_h\|_m^2,$$

waaruit volgt wegens (3.14.8) dat

$$(3.14.13) \quad \|e_h\|_m \leq Ch^{d-m} \|u\|_d,$$

$$d = \min(k+1, k+1) = k+1.$$

Uit (3.14.12) en (3.14.13) volgt dat

$$(3.14.14) \quad |(g, e_h)| \leq Ch^{k+1-s} \|u\|_{k+1} \|w\|_{2m-s}.$$

Wegens de stabiliteit van L geldt dat

$$(3.14.15) \quad \|w\|_{2m-s} \leq C \|g\|_{-s},$$

waaruit volgt dat

$$|(g, e_h)| \leq Ch^{k+1-s} \|u\|_{k+1} \|g\|_{-s}.$$

Wegens de formule

$$\|v\|_s = \sup_{g \in H^{-s}(\Omega)} |(g, v)| / \|g\|^{-s}$$

geldt

$$(3.14.16) \quad \|e_h\|_s \leq Ch^{k+1-s} \|u\|_{k+1}.$$

LITERATUUR

- BAKKER, M., *The Galerkin's method for the solution of certain nonlinear two-point boundary value problems* (verschijnt in [1976]).
- BELL, K., *A refined triangular plate bending finite element*, Int. Journ for Num. Meth. in Engineering 1, 101-122 (1969).
- CIARLET, P.G. & P.A. RAVIART, *The combined effect of curved boundaries and numerical integration in isoparametric finite element methods*.
Uit: A.K. Aziz, editor, *The mathematical foundations of the finite element method with application to partial differential equations*, Academic Press, New York, London, 1972.
- CIARLET, P.G. & P.A. RAVIART, *General Lagrange and Hermite interpolation in \mathbb{R}^n with applications to finite element methods*, Arch. Rat. Mech. An. 46, 177 ff. (1972).

FELIPPA, C. & R.W. CLOUGH, *The finite element methods in solid mechanics*.
 Uit: G. Birkhoff & R.S. Varga, editors, Numerical Solution
 of Field Problems in Continuum Physics, A.M.S., Providence,
 Rhode Island, 1970.

MITCHELL, A.R., *Introduction to mathematics of finite elements*.
 Uit: J.R. Whiteman, editor, The mathematics of finite elements
 and applications, Academic Press, London, New York, 1973.

NITSCHKE, J.A., *Lineare Splinefunktionen und die Methode von Ritz für
 elliptische Randwertaufgaben*, Arch. Rat. Mech. An. 46, 348 ff.
 (1972).

STRANG, G. & G. FIX, *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-
 Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.

ZLAMÁL, M., *A finite element procedure of the second order of accuracy*,
 Num. Math. 14, 394-402 (1970).